EXERCICE N° 1 — 10' — 3 point

1. On considère une suite (U_n), définie sur $\mathbb{N}$, dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (V_n) sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{-2}{U_n}$

   (a) Si (U_n) est convergente, alors (V_n) est convergente.

   (b) Si (U_n) est minorée par 2, alors (V_n) est minorée par -1.

   (c) Si (U_n) est décroissante, alors (V_n) est croissante.

   (d) Si (U_n) est divergente, alors (V_n) converge vers zéro.

2. Soit la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par: $V_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

   (a) (U_n) est bornée.

   (b) (U_n) converge vers 0.

   (c) (U_n) est décroissante.

   (d) La suite de terme général $|U_n|$ est décroissante.

3. (U_n) est la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = U_n - n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) (U_n) est une suite arithmétique de raison $-n$.

   (b) (U_n) est décroissante.

EXERCICE N° 2 — 20' — 4 point

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{2 + U_n}, \end{cases}$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a : $1 \leq U_n < 2$.

   (b) Montrer que la suite U est croissante.

   (c) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 1 - \dfrac{2}{U_n}$

   (a) Montrer que V est une suite géométrique.

   (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :$|U_{n+1} - 2| \leq \dfrac{2}{3}|U_n - 2|$.

☎ : 23390248 - 29862267

Tous droits réservées ©TakiAcademy.com

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(c) Retrouver la limite de U lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N° 3 — 25' — 5 point

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = \frac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{2(u_{n+1} + 2)}$.

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{3}{4}(u_n - 2)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 2 \leqslant 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

   (c) Prouver que la suite u converge vers un réel que l'on précisera.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $0 \leqslant S_n - n(n+1) \leqslant 8n\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

   (b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

EXERCICE N° 4 — 15' — 4 point

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{3}{U_n} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout n , $U_n \geq 2$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2}|U_n - 3|$;

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   (c) En déduire la limite de la suite (U_n).

3. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

   (a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

   (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   (c) Retrouver la limite de la suite U.

☎ : 23390248 - 29862267
Tous droits réservées ©TakiAcademy.com